MA2 – řešení „domácího cvičení" – OLDR 2. řádu
(pokračování)

5. příklad: řešení počáteční úlohy pro OLDR 2. řádu se speciální pravou stranou

5a) $y'' - 3y' = 6x - 5 + 18e^{-3x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(i) řešení homogenní rovnice $y'' - 3y' = 0$:

charakteristická rovnice (dále jen ch.r.) je

$\lambda^2 - 3\lambda = 0$, a řešení ch.r.: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$,

tedy fundamentální systém řešení (dále f.s.)

je $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^{3x}$ a

obecné řešení $y_H(x) = c_1 + c_2 e^{3x}$, $x \in R$, $c_1, c_2 \in R$

(ii) nalezení „partikulárního řešení odhadem":

pravou stranu rovnice $f(x) = 6x - 5 + 18e^{-3x}$ „rozdělíme" tak, abychom mohli použít „návod" „pro odhad partikulárního řešení":

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \text{ , kde}$$

$$f_1(x) = 6x - 5 \quad , \quad f_2(x) = 18e^{-3x} \ ;$$

Bude-li pak $y_{p_1}(x)$ partikulární řešení dané rovnice s pravou stranou $f_1(x)$, a analogicky $y_{p_2}(x)$ partikulární řešení dané rovnice s pravou stranou $f_2(x)$, pak $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ řeší rovnici s pravou stranou $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ (díky linearitě „naší" diferenciální rovnice.

<u>A výpočet:</u>

1) $f_1(x) = 6x - 5$ – odhad řešení: $y_{p_1}(x) = x(Ax+B)$ (neboť $\lambda = 0$ je jednonásobný kořen ch.r., tedy $k = 1$)

po dosazení do rovnice $y'' - 3y' = 6x - 5$

dostaneme: $2A - 3(2Ax + B) = 6x - 5$,

a tedy („srovnání" koeficientů polynomů) máme:

$$-6A = 6 \Rightarrow A = -1$$
$$2A - 3B = -5 \Rightarrow B = 1,$$

<u>tedy $y_{p_1}(x) = x - x^2$, $x \in R$</u>

2) $f_2(x) = 18e^{-3x}$ – odhad řešení: $y_{p_2}(x) = Ae^{-3x}$

(zde $\lambda = -3$ není kořen ch.r., tj. $k = 0$)

a po dosazení do rovnice $y'' - 3y' = 18e^{-3x}$

dostaneme: $(9A - 3(-3A))e^{-3x} = 18e^{-3x}$,

tedy $A = 1$

a $\underline{y_{p_2}(x) = e^{-3x}, \; x \in R}$

Z 1) a 2): $\underline{y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = x - x^2 + e^{-3x}}$

Tedy, obecné řešení dané rovnice je

$$y_{ob}(x) = c_1 + c_2 e^{3x} + x - x^2 + e^{-3x}, \; x \in R, \; c_1, c_2 \in R$$

<u>Řešení počáteční úlohy:</u>

$y(0) = 0 \quad : \quad c_1 + c_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -2$

$y'(0) = 1 \quad : \quad 3c_2 + 1 - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1$

a

$$\underline{y_{poč}(x) = -2 + e^{3x} + x - x^2 + e^{-3x}, \; x \in R}$$

5b) (už „rychleji", bez komentáře)

$$y'' + 4y = 16e^{-2x} - 8\sin 2x \,;\quad y(0) = 3,\ y'(0) = -4$$

(i) <u>řešení homogenní rovnice</u> $\quad y'' + 4y = 0$

ch.r. : $\quad \lambda^2 + 4 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 2i$,

a tedy f.s. je $\quad y_1(x) = \cos 2x,\ y_2(x) = \sin 2x$

a řešení $\quad \underline{y_H(x) = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x \,,\ x \in R,\ c_1, c_2 \in R}$

(ii) <u>partikulární řešení – odhadem</u> :

opět : $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, tede

$$f_1(x) = 16e^{-2x} \,,\quad f_2(x) = -8\sin 2x$$

1) $f_1(x) = 16e^{-2x}$ – odhad řešení : $y_{p_1}(x) = Ae^{-2x}$

(zde $\Lambda = -2$ – není kořen ch.r.,
tedy $k = 0$)

a po dosazení do rovnice :

$$(4A + 4A)e^{-2x} = 16e^{-2x} \Rightarrow A = 2$$

a $\quad \underline{y_{p_1}(x) = 2e^{-2x} \,,\ x \in R}$

2) $f_2(x) = -8 \sin 2x$ – odhad řešení (zde $\lambda = 2i$ je jednonásobný kořen ch.r., tedy $k = 1$):

$$y_{p_2}(x) = x\,(A\cos 2x + B \sin 2x)\ ;$$

po dosazení do rovnice $y'' + 4y' = -8 \sin 2x$ dostaneme:

$$x\,(-4A\cos 2x - 4B \sin 2x) - 4A \sin 2x + 4B\cos 2x +$$
$$+ 4x\,(A\cos 2x + B \sin 2x) = -8 \sin 2x\ ,\quad x \in R$$

Aby platila tato rovnost pro všechna $x \in R$, „musí" se rovnat koeficienty u $\cos 2x$, resp. u $\sin 2x$, tedy:

u $\sin 2x$: $\quad -4A = -8 \Rightarrow A = 2$

$\cos 2x$: $\quad 4B = 0 \Rightarrow B = 0$

tedy $\underline{y_{p_2}(x) = 2x \cdot \cos 2x,\ x \in R}$

(Pomocné výpočty :

$$y_{p_2}'(x) = A\cos 2x + B \sin 2x + x\,(-2A \sin 2x + 2B\cos 2x)$$

$$y_{p_2}''(x) = -2A \sin 2x + 2B\cos 2x - 2A \sin 2x + 2B\cos 2x$$
$$+ x\,(-4A\cos 2x - 4B \sin 2x) =$$
$$= -4A \sin 2x + 4B\cos 2x + x\,(-4A\cos 2x - 4B \sin 2x)\ )$$

a obecné řešení dané rovnice je $\left(y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)\right)$

$$\underline{y_{ob}(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 2e^{-2x} + 2x\cos 2x, \ x \in R}$$
$$c_1, c_2 \in R$$

<u>Řešení počáteční úlohy:</u>

$y(0) = 3$: $c_1 + 2 = 3 \Rightarrow c_1 = 1$

$y'(0) = -4$: $2c_2 - 4 + 2 = -4 \Rightarrow c_2 = -1$

tedy: $\underline{y_{poč}(x) = \cos 2x - \sin 2x + 2e^{-2x} + 2x\cos 2x, \ x \in R}$

<u>Ukažme si ještě užití komplexní exponenciely pro odhad řešení pro $f_2(x) = -8\sin 2x$</u>

$$f_2(x) = -8\sin 2x = \operatorname{Im}\left(-8e^{2ix}\right)$$
$$\left(= \operatorname{Im}\left(-8\left(\cos 2x + i\sin 2x\right)\right)\right)$$

Pak lze „vzít" $\tilde{f}(x) = -8e^{2ix}$ a najít odhadem odpovídající $\tilde{y}_{p_2}(x)$ k této pravé straně rovnice; pak (opět díky linearitě rovnice a rovnosti komplexních čísel) bude naše

$$y_{p_2}(x) = \operatorname{Im} \tilde{y}_{p_2}(x) .$$

a nyní: tedy odhad řešení je (opět $k=1$)

$$\tilde{y}_{p_2}(x) = A x e^{2ix},$$

a pak $\tilde{y}_{p_2}'(x) = A e^{2ix} + Ax(2i e^{2ix}) =$

$$= A(1+2ix)e^{2ix}$$

a $\quad y_{p_2}''(x) = A\left(2i e^{2ix} + (1+2ix).2i e^{2ix}\right)$

$$= A(4i - 4x)e^{2ix}$$

a po dosazení do rovnice $\quad y'' + 4y = -8e^{2ix}$

máme: $\quad A e^{2ix}\left[(4i-4x) + 4x\right] = -8e^{2ix}$

a tedy $\quad 4Ai = -8$

$$A = -\frac{2}{i} = 2i$$

a pak $\quad \tilde{y}_{p_2}(x) = 2ix(\cos 2x + i \sin 2x) =$

$$= x(-2\sin 2x + 2i\cos 2x),$$

tedy $\quad \underline{y_{p_2}(x)} = \operatorname{Im} \tilde{y}_{p_2}(x) = \underline{2x\cos 2x} \quad$ (opět !)

navíc máme (jako odměnu) řešení naší rovnice pro pravou stranu $f(x) = -8\cos 2x$ –

– je to reálná část $\tilde{y}_{p_2}(x)$, tj. $y_p(x) = -2x\sin 2x$, $x \in R$

A poslední příklad (pro zájemce) –
– rovnice „jednorozměrných" vynucených kmitů s „tlumením" (pokud $\ell > 0$): hledáme $x(t)$ tak, aby

$$x'' + 2\ell x' + \omega^2 x = \sin(\Omega t) \quad , \quad t \geq 0$$

(a $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ – ve spec. případu $\ell = 0$)

($\omega, \Omega > 0$, $\ell \geq 0$)

---

a) řešení homogenní rovnice (tj. kmity bez vnější síly)

i) $x'' + 2\ell x' + \omega^2 x = 0 \quad , \quad \ell > 0$

ch.r.: $\lambda^2 + 2\ell\lambda + \omega^2 = 0 \quad , \quad D = 4(\ell^2 - \omega^2)$

1) $\ell > \omega$ (silné tlumení): $\lambda_{1,2} = -\ell \pm \sqrt{\ell^2 - \omega^2}$

$$x_H(t) = C_1 e^{(-\ell + \sqrt{\ell^2-\omega^2})t} + C_2 e^{(-\ell - \sqrt{\ell^2-\omega^2})t} ,$$

zde $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$ (neboť $-\ell \pm \sqrt{\ell^2 - \omega^2} < 0$)

2) $\ell = \omega$: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\ell$, pak řešení je

$$x_H(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\ell t} \quad , \quad t \geq 0$$

a opět ($\ell > 0$) je $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$

3) $\ell < \omega$: $\lambda_{1,2} = -\ell \pm i\sqrt{\omega^2-\ell^2}$

$$(*) \quad \text{a} \quad x_H(t) = e^{-\ell t}\left(c_1\cos\left(\sqrt{\omega^2-\ell^2}\cdot t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\omega^2-\ell^2}\cdot t\right)\right)$$

$$(c_1, c_2 \in R,\ t \geqq 0)$$

(nyní už jsou zde „kmity", ale jejich amplituda pro $t \to \infty$ opět má limitu 0 – $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\ell t} = 0$, $\ell > 0$)

Ukažme si obvyklejší (ve fyzice) tvar řešení (*):

Pokud by platilo $c_1^2 + c_2^2 = 1$, pak existuje $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ tak, že $c_1 = \sin\varphi$, $c_2 = \cos\varphi$; a pokud je $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, lze výraz (*) „přepsat" takto (vytkneme $\sqrt{c_1^2+c_2^2}$)

$$x_H(t) = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\, e^{-\ell t}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\ell^2}\cdot t\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\ell^2}\cdot t\right)\right)$$

Pak, je-li $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ takové, že

$$\sin\varphi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \quad \text{a} \quad \cos\varphi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$$

(φ takové existuje, neboť $\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2 = 1$)

dostaneme (díky vzorci $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$)

(**) $x_H(t) = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\; e^{-lt} \sin\left(\sqrt{\omega^2-l^2}\, t + \varphi\right)$, $t \geqq 0$

($\sqrt{c_1^2+c_2^2} \cdot e^{-lt}$ – amplituda kmitů (fyzikálně) a
$\sqrt{\omega^2-l^2}$ – frekvence , φ – počáteční fáze kmitu)

Ukažme si řešení rovnice netlumených kmitů (tj. $l=0$)
a bez působení vnějších sil (tj. rovnice je homogenní):

$$x'' + \omega^2 x = 0 \quad , \ \omega > 0, \ t \geqq 0$$

s počátečními podmínkami $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$

ch. r. je $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, a její kořeny $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$,

řešení (obecné): $x_H(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$, $t \geqq 0, c_1, c_2 \in R$ (1)

nebo takéme tvaru $(\sqrt{c_1^2+c_2^2} \neq 0)$

$$x_H(t) = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\, \sin(\omega t + \varphi), \qquad (2)$$

kde $\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \sin\varphi$, $\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \cos\varphi$, a pro $c_2 \neq 0$ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{c_1}{c_2}$

Řešení počáteční úlohy:

$x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = x_0$

$x'(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{v_0}{\omega}$

Pak $x_{poč}(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\, \sin(\omega t + \varphi)$, a $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_0 \omega}{v_0}$
(pro $v_0 \neq 0$)

a zkusme ještě řešit původní problém s $l = 0$,
tj. počáteční úlohu pro rovnici

$$\underline{x'' + \omega^2 x = \sin(\Omega t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0}$$

Potřebujeme" už jen partikulární řešení rovnice:
"(tj. když je „vnější" síla $f(x) = \sin(\Omega t)$)

a) $\underline{\text{pro } \Omega \neq \omega}$:
odhadem lze: $\quad x_p(t) = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t$
(neboť $\Lambda = \Omega i$ není kořenem ch. r. $\Rightarrow k = 0$)
zde stačí jen $\underline{x_p(t) = A \sin \Omega t}$ (chybí " $x'(t)$ " v rovnici)

<u>a výpočet A</u>: (dosazením do rovnice dostaneme)

$$-A\Omega^2 \sin \Omega t + \omega^2 A \sin \Omega t = \sin \Omega t,$$

tj.
$$A(\omega^2 - \Omega^2) = 1$$
$$A = \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2},$$

a tedy $\quad x_p(t) = \dfrac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t, \quad t \geq 0$

a $$\underline{x_{ob}(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t,}$$

$$c_1, c_2 \in R, \quad t \geq 0$$

a řešení počáteční úlohy:

$x(0) = x_0$: $\quad c_1 = x_0$

$x'(0) = v_0$: $\quad \omega c_2 + \frac{\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = v_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{\omega}\left(v_0 - \frac{\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\right)$$

a tedy $(t \geqq 0)$

$$x_{poč}(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega}\left(v_0 - \frac{\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\right)\sin \omega t + \frac{1}{\omega^2-\Omega^2}\sin \Omega t$$

a pokud bychom „měli" tvar řešení (**), je amplituda kmitů $\sqrt{x_0^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(v_0 - \frac{\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\right)^2}$

(tj. je dána frekvencemi ω, Ω a poč. podmínkami)

b) případ" $\Omega = \omega$ – resonance, tj. $f(x) = \sin(\omega t)$

„odhad partikulárního řešení je ($\Lambda = \omega i$ je jednonásobný kořen ch.r., tj. $k=1$)

$$x_p(t) = t\,(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

pak $x_p'(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + t(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t)$

a $x_p''(t) = -2A\omega \sin \omega t + 2B\omega \cos \omega t + t(-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t)$

a po dosazení do rovnice dostáváme:

$$-2A\omega \sin\omega t + 2B\omega \cos\omega t = \sin\omega t,$$

tedy: $-2A\omega = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2\omega}$

$2B\omega = 0 \Rightarrow B = 0$

a $$x_p(t) = -\frac{1}{2\omega} \cdot t \cos\omega t, \quad t \geq 0$$

A pak obecné řešení dané rovnice je

$$x_{oo}(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t - \frac{1}{2\omega} t \cdot \cos\omega t$$

$$t \geq 0, \ c_1, c_2 \in R$$

A řešení počáteční úlohy:

$x(0) = x_0$: $c_1 = x_0$

$x'(0) = v_0$: $c_2 \omega - \frac{1}{2\omega} = v_0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{\omega}\left(v_0 + \frac{1}{2\omega}\right)$

a $$x_{poč}(t) = x_0 \cos\omega t + \left(v_0 + \frac{1}{2\omega}\right)\frac{1}{\omega} \sin\omega t - \frac{1}{2\omega} t \cdot \cos\omega t$$

tak, že $$x_{poč}(t) = \left(x_0 - \frac{t}{2\omega}\right)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\left(v_0 + \frac{1}{2\omega}\right)\sin\omega t;$$

A amplituda kmitů je pak

$$a(t) = \sqrt{\left(x_0 - \frac{t}{2\omega}\right)^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(v_0 + \frac{1}{2\omega}\right)^2} \to \infty \quad !$$

pro $t \to \infty$